



«Клад Ацтеков»

КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ



ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Решебник для 8-9 класса

Первая часть

Задача №1

Когда четверых ребят спросили, сколько из них вчера ходили в кино, Маша сказала, что никто, Сева, что один человек, Вася, что двое, а Даша, что трое. Известно, что правду сказали только те, кто вчера ходил в кино. Сколько ребят были вчера в кино?

А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 4

Решение

Заметим, что все высказывания противоречат друг другу, значит среди них не более одного правдивого. Если среди них нет правдивых, то в кино вчера были не 0, не 1, не 2 и не 3 человека, значит все они должны были быть в кино, но тогда они все должны были сказать правду, а это не так. Получается, что правду сказал ровно один человек, значит и в кино был только он.

Ответ: А. 1.

Задача №2

Выпишем в порядке возрастания все четырехзначные числа, которые можно получить переставляя цифры в числе 2015. Чему равна сумма двух соседей числа 2015 в этом ряду?

А. 3022 Б. 3301 В. 3571 Г. 3625

Решение

Будем выписывать числа в порядке возрастания. Для этого в самый старший разряд выписываем самую маленькую цифру из возможных, за ней самую маленькую из оставшихся и т.д. Числа стоят так 1025, 1052, 1205, 1250, 1502, 1520, 2015, 2051 и т.д. То есть сумма соседей числа 2015 равна $1520 + 2051 = 3571$.

Ответ: В. 3571.

Задача №3

На вечере бальных танцев собралось не более 50 человек. В какой-то момент $\frac{3}{4}$ мужчин танцевали с $\frac{4}{5}$ женщин. Сколько всего людей танцевало в этот момент?

А. 20 Б. 24 В. 30 Г. 40

Решение

Пусть всего на вечере было x женщин и y мужчин. Тогда $x + y$ не больше 50. $\frac{3}{4}x = \frac{4}{5}y$. То есть $15x = 16y$. 15 и 16 взаимнопросты. Значит x делится на 16, а y на 15, и нам подходит только пара 16 и 15, иначе их сумма была бы больше 50. $\frac{3}{4}$ от 16 это 12, значит в указанный момент танцевало 24 человека.

Ответ: Б. 24.

Задача №4

5 ламп соединены так, что если включить или выключить любую из них, то меняется статус какой-то другой лампы (она включается, если выключена, и выключается, если включена). Эта другая лампа каждый раз выбирается случайным образом, независимо от всех предыдущих выборов. Вначале все лампы выключены. Затем вы выполняете какие-то 10 операций включения/выключения. Какое из следующих утверждений после этого верно?

А. все лампы не могут быть выключены Б. все лампы будут включены

В. все лампы не могут быть включены Г. все лампы будут выключены

Решение

Заметим, что четность включенных ламп никогда не меняется. Потому что с помощью одной такой операции возможно, что либо включенных ламп станет больше на 2, либо меньше на 2, либо их количество не изменится. Изначально было 0 включенных ламп, значит их никогда не сможет стать 5, то есть все лампы никогда не будут включены. Осталось показать, что все остальные высказывания не верны. Высказывание А не верно, потому что возможен случай, например, когда все десять операций провели с одной и той же лампой, при этом второй лампой всегда выбиралась тоже одна и та же лампа, то есть в итоге все лампы вновь оказались выключены. Про высказывание Б мы уже доказали, что все лампы не будут включены ни при каких операциях. Чтобы показать, что высказывание Г не верно, достаточно привести пример, когда в итоге будут включенные лампы. Пусть первым действием мы включили первую лампу, а вторая зажглась случайно. А все последующие действия мы включали и выключали третью лампу, а вместе с ней включалась и выключалась четвертая лампа. В итоге будут гореть первые 4 лампы, то есть не все лампы будут выключены.

Ответ: В. все лампы не могут быть включены.

Задача №5

У Маши есть четверо часов. Одни часы ошибаются на 2 мин, другие – на 3 мин, третьи – на 4 мин, а четвертые – на 5 мин. Как-то Маша решила определить точное время по показаниям своих четырех часов. В тот момент часы показывали: без 6 минут 3, без 3 минут 3, 3 часа и 2 минуты, 3 часа и 3 минуты. Каково было точное время?

А. 3:00

Б. 2:57

В. 2:58

Г. 2:59

Решение

Предположим, что на 2 минуты ошибаются первые часы. Тогда сейчас либо 2.52, либо 2.56. Если сейчас 2.52, то третьи часы ошибаются на 10 минут, а таких часов у Маши нет. Если сейчас 2.56, то третьи часы ошибаются на 6 минут, таких часов у Маши тоже нет.

Предположим, что на 2 минуты ошибаются вторые часы. Тогда сейчас либо 2.55, либо 2.59. Если сейчас 2.55, то третьи часы ошибаются на 7 минут, а таких часов у Маши нет. Если сейчас 2.59, то первые часы ошибаются на 5 минут, третьи на 3 минуты, а четвертые на 4. Это соответствует условию, поэтому возможно в указанный момент времени было 2.59. Убедимся, что никакое другое время не подходит.

Предположим, что на 2 минуты ошибаются третьи часы. Тогда сейчас либо 3.00, либо 3.04. Если сейчас 3.00, то первые часы ошибаются на 6 минут, а таких часов у Маши нет. Если сейчас 3.04, то первые часы ошибаются на 10 минут, таких часов у Маши тоже нет.

И, наконец, предположим, что на 2 минуты ошибаются четвертые часы. Тогда сейчас либо 3.01, либо 3.05. Если сейчас 3.01, то первые часы ошибаются на 7 минут, а таких часов у Маши нет. Если сейчас 3.05, то первые часы ошибаются на 11 минут, таких часов у Маши тоже нет.

Значит в указанный момент было 2.59.

Ответ: Г. 2:59.

Задача №6

Назовем трехзначные число волшебным, если оно обладает следующим свойством. Если стереть первую цифру такого числа, то получится число, которое является полным квадратом. Если стереть последнюю цифру, то также получится полный квадрат. Сколько существует волшебных трехзначных чисел?

А. таких чисел нет Б. 1 В. 4 Г. 10

Решение

Первые две цифры волшебного числа образуют полный квадрат. Значит число начинается с одной из следующих пар чисел: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Заканчивается же оно так же одной из этих пар цифр. Если оно начинается на 16, то оканчиваться может только на 4. Это число 164. Если оно начинается на 25, то нет такой цифры, чтобы оно оканчивалось квадратом. Если оно начинается на 36, то оканчиваться может только на 4. Это число 364. Если оно начинается на 49, то нет такой цифры, чтобы оно оканчивалось квадратом. Если оно начинается на 64, то оканчиваться может только на 9. Это число 649. Если оно начинается на 81, то оканчиваться может только на 6. Это число 816.

Значит волшебных трехзначных чисел 4: 164, 364, 649, 816.

Ответ: В. 4.

Задача №7

Один странный мальчик по средам и четвергам говорит только правду, по понедельникам всегда лжет, а в остальные дни может как соврать, так и сказать правду. Шесть дней подряд его спрашивали, как его зовут и получали такие ответы: Петя, Вася, Петя, Вася, Коля, Вася. Как зовут этого мальчика?

А. Петя Б. Вася В. Коля Г. определить невозможно

Решение

Заметим, что он два дня подряд (в среду и четверг) говорит правду, значит среди указанных 6 дней одновременно среда и четверг не встречаются, значит либо первый день – четверг, либо шестой день – среда. Пусть первый день – четверг, значит его зовут Петя. Тогда понедельник – это пятый день, и он соврал, этот вариант подходит. Пусть шестой день – среда, тогда его зовут Вася, а понедельник – это четвертый день, но тогда в него он тоже сказал правду, что противоречит условию. Значит странного мальчика зовут Петя.

Ответ: А. Петя.

Задача №8

Волшебное квадратное зеркальце изначально имеет сторону 6 см. Но когда оно врет, то его сторона уменьшается на 2 см, а когда говорит правду, его периметр удваивается. В течение дня зеркальце в каком-то порядке сделало 3 правдивых высказывания и 3 ложных. Какое наибольшее значение после этого может иметь его периметр?

А. 42 см Б. 136 см **В. 168 см** Г. 192 см

Решение

Заметим, что если периметр удваивается, то это означает, что удваивается сторона зеркальца. Наибольший периметр достигается при наибольшей стороне. Если зеркальце сначала 3 раза говорит правду, а потом 3 раза врет, то есть сторона становится равна $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 42$ см.

Если зеркало сначала соврало, то его сторона стала бы 4 см, тогда даже после трех правд без ложных высказываний его сторона стала бы $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ см, а с ложными высказываниями еще меньше. Значит зеркало сначала сказало правду, и его сторона стала 12 см. Если после этого оно соврало, то его сторона стала 10 см, и даже после двух оставшихся правдивых высказываний без ложных его сторона стала бы 40 см, а с ложными высказываниями еще меньше. Значит и второе высказывание было правдой, после чего сторона зеркала стала 24 см. Если после этого зеркало соврало, то его сторона стала 22 см. Тогда либо следующее высказывание будет правдой, а два оставшихся ложью, тогда сторона зеркала станет $22 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ см; либо следующее высказывание будет ложью, тогда сторона зеркала станет 20 см, но тогда даже без еще одного ложного утверждения, сторона будет 40 см. Значит и третье высказывание должно быть правдой, и наибольшее значение стороны достигается, когда зеркало сначала 3 раза сказало правду, а потом 3 раза ложь. Значит наибольшее значение стороны – 42 см, а наибольший периметр $42 \cdot 4 = 168$ см.

Ответ: В. 168 см.

Задача №9

Незнайка умеет без ошибок складывать, умножать и делить, но не умеет определять правильный порядок действий. Какой ответ в примере $4 \cdot 9 + 4 : 2$ он не сможет получить?

А. 20 Б. 26 **В. 40** Г. 44

Решение

Решение: Заметим, что здесь всего 3 действия, для которых надо выбрать последовательность, в которой Незнайка будет их выполнять. Соответственно, всего существует $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ способ выполнить порядок действий. Способы такие:

Умножение, сложение, деление.

$$((4 \cdot 9) + 4) : 2 = 20$$

Умножение, деление, сложение.

$$(4 \cdot 9) + (4 : 2) = 38$$

Сложение, деление, умножение.

$$4 \cdot ((9 + 4) : 2) = 26$$

Сложение, умножение, деление.

$$(4 \cdot (9 + 4)) : 2 = 26$$

Деление, умножение, сложение.

$$4 \cdot 9 + (4 : 2) = 38$$

Деление, сложение, умножение.

$$4 \cdot (9 + (4 : 2)) = 44$$

Таким образом, из предложенных ответов он не сможет получить ответ 40.

Ответ: В. 40.

Задача №10

Миша, Гриша и Паша пришли к парикмахеру. Побрив Мишу, тот сказал: «Посмотри сколько денег в ящике стола, положи столько же и возьми 100 рублей сдачи». То же он сказал Грише и Паше. Когда они ушли, оказалось, что в ящике осталось 20 рублей. Сколько рублей было в ящике первоначально, если всем удалось совершить задуманное?

А. 20 Б. 90 В. 100 Г. 200

Решение

Пусть изначально в ящике было x рублей. Тогда после ухода Миши в нем стало $2 \cdot x - 100$ рублей. После ухода Гриши $2 \cdot (2 \cdot x - 100) - 100 = 4 \cdot x - 300$. После ухода Паши $2 \cdot (4 \cdot x - 300) - 100 = 8 \cdot x - 700 = 20$. Тогда $8 \cdot x = 720$. $x = 90$ рублей.

Ответ: Б. 90.

Вторая часть

Задача №1

Найдите такое трехзначное число, у которого отношение его самого к его сумме цифр наименьшее из возможных?

Решение

Представим трехзначное число в виде: $100x+10y+z$, где x, y, z – цифры. Тогда нужно найти такое число, чтобы $(100x+10y+z)/(x+y+z)$ было бы наименьшим из возможных. $(100x+10y+z)/(x+y+z) = (99x+9y)/(x+y+z) + 1$.

Заметим, что отношение тем меньше, чем меньше числитель дроби, и чем больше знаменатель. Числитель не зависит от z , поэтому чтобы добиться максимального знаменателя z должен быть равен 9. $(99x+9y)/(x+y+9)$ должно быть минимально.

Предположим, что $x=2$, тогда дробь не меньше, чем $(99 \cdot 2 + 9)/(2 + 9 + 9) = 10,35$. А значит $(99x+9y)/(x+y+z) + 1 = 11,35$.

Если $x > 2$, то $99x+9y > 30$, тогда как $x+y+9 < 30$, значит отношение больше 10. А значит $(99x+9y)/(x+y+z) + 1 > 11$.

Найдем наименьшее отношение при $x=1$ (значения округлены до сотых).

Число	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199
Сумма цифр	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Отношение	10,90	10,82	10,75	10,69	10,64	10,60	10,56	10,53	10,50	10,47

Заметим, что все отношения в таблице меньше 11, а наименьшее достигается при числе 199.

Ответ: 199.

Задача №2

Запись натурального числа состоит только из цифр 3 и 7, а сумма всех его цифр делится на 3 и на 7. Найдите наименьшее такое число (в записи числа встречаются как 3 так и 7).

Решение

Так как сумма цифр числа делится на 3, то сумма всех семерок должна делиться на 3. 3 и 7 взаимнопросты, значит число семерок в числе как минимум 3. Аналогично, в числе как минимум семь троек. Чем больше цифр в числе, тем оно больше. Значит минимальное число состоит из семи троек и трех семерок, наименьшее такое число 333333777.

Ответ: 3333333777.

Задача №3

Натуральное число n является произведением двух различных простых чисел, а сумма всех его делителей, считая 1, но не считая n , равна 1000. Найдите n .

Решение

Пусть $n=x*y$, где x и y различные простые числа. Тогда все его делители – это 1, x , y и $x*y$. По условию $1+x+y=1000$. $x+y=999$. Все простые числа кроме 2 нечетные, значит при сложении пары таких чисел получается четное число, а 999 нечетное, значит $x=2$, тогда $y=997$ (это действительно простое число). Тогда $n=2*997=1994$.

Ответ: 1994.

Задача №4

Вычислить сумму всех трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, таких, что одна и та же цифра не может встречаться в числе несколько раз.

Решение

Во всех составленных числах каждая цифра стоит на первом месте ровно 6 раз (существует 6 способов выбрать упорядоченную пару из трех оставшихся цифр), аналогично на втором и на третьем месте она так же стоит по 6 раз. Значит сумма всех составленных чисел равна $(600+60+6)*(1+2+3+4)=6660$.

Ответ: 6660.

Задача №5

На окраску деревянного кубика затратили 3 г краски. Когда она высохла, кубик распилили на 27 одинаковых кубиков меньшего размера. Сколько краски потребуется для того, чтобы закрасить образовавшиеся при этом неокрашенные поверхности?

Решение

Чтобы распилить кубик на 27 одинаковых кубиков меньшего размера, нужно сделать 6 разрезов. То есть при этом площадь всех неокрашенных поверхностей будет равняться удвоенной (потому что нужно покрасить с двух сторон) площади шести граней, то есть площади 12 граней, у кубика как раз 6 граней, на которые ушло 3 г краски, значит понадобится еще 6 г краски.

Ответ: 6 г.

Третья часть

Задача №1

Лена задумала целое число. Катя умножила его не то на 5, не то на 6. Света прибавила к результату Кати не то 5, не то 6. Люба отняла от результата Светы не то 5, не то 6. В итоге получилось 55. Какое число задумала Лена? Перечислите все возможные варианты.

Решение

Проведем анализ с конца. После действий Любы получилось число 55, а мы знаем, что она отнимала то ли 5, то ли 6. Значит Света получила число 60 или 61. Света прибавляла к результату Кати 5 или 6, значит Катя получила либо 54, либо 55, либо 56. Мы знаем, что Катя, умножала Ленино число на 5 или 6. 56 не делится ни на 5, ни на 6. Значит Катя могла либо получить число 55, умножив 11 на 5, либо число 54, умножив 9 на 6. Значит Лена задумала либо 9, либо 11.

Ответ: 9 или 11.

Задача №2

Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

Решение

Предположим, что такое возможно. Тогда пусть для каждой вершины x - сумма номеров ребер, которые в ней сходятся. Заметим, что каждое ребро входит в две вершины. Поэтому сумма всех ребер должна равняться $8 \cdot x / 2 = 4 \cdot x = 1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78$. Но 78 не делится на 4, а x должен быть числом натуральным. Следовательно, нельзя таким образом занумеровать ребра куба.

Ответ: нет.

Задача №3

У Тимура появились монеты в 1,2,3 и 5 тугриков, по одной каждого достоинства, которые, если они настоящие, весят соответственно 1,2,3 и 5г каждая. Он узнал, что среди них есть ровно одна не настоящая, которая отличается весом от настоящей (но не известно, тяжелее она или легче). Каким образом Тимур сможет за два взвешивания на чашечных весах без гирь установить, какая из монет фальшивая?

Решение

Первым взвешиванием Тимур должен на одну чашу весов положить монету в 3 тугрика, а на другую монеты в 1 и 2 тугрика. Если весы находятся в равновесии, то все взвешенные монеты настоящие, тогда фальшивая монета - в 5 тугриков. Здесь второе взвешивание уже не нужно, но если мы сравним ее с монетами в 2 и 3 тугрика, то еще и поймем, легче она или тяжелее настоящей.

Если монета в 3 тугрика весит меньше, то у нас есть три возможности. Либо 3 тугрика - фальшивая легкая монета, либо 1 тугрик - фальшивая тяжелая монета, либо 2 тугрика - фальшивая тяжелая монета. Тогда вторым взвешиванием сравним монеты в 5 тугриков с монетами 2 и 3 тугрика. Если они равны, значит 1 - фальшивая тяжелая монета. Если 5 тугриков тяжелее, значит фальшивая монета

легче настоящей, значит это 3. Если 5 тугриков легче, значит фальшивая монета тяжелее настоящей, значит это 2.

Если монета в 3 тугрика весит больше, то у нас есть три возможности. Либо 3 тугрика – фальшивая тяжелая монета, либо 1 тугрик – фальшивая легкая монета, либо 2 тугрика – фальшивая легкая монета. Тогда вторым взвешиванием сравним монеты в 5 тугриков с монетами 2 и 3 тугрика. Если они равны, значит 1 – фальшивая легкая монета. Если 5 тугриков тяжелее, значит фальшивая монета легче настоящей, значит это 2. Если 5 тугриков легче, значит фальшивая монета тяжелее настоящей, значит это 3.

При всех возможных сценариях, мы смогли определить фальшивую монету, а кроме того определили, легче она или тяжелее настоящей.

Задача №4

Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных и докажите, что других нет.

Решение

Легко убедиться, что числа 2, 3, 5, 7 и 11 нельзя представить в виде суммы двух составных чисел. Заметим, что все простые числа больше 2 – нечетные. Число 13 можно представить в виде суммы 9 и 4, каждое из которых составное. Все последующие нечетные числа представляются в виде $9 + 2 \cdot k$, где $k > 2$, таким образом все простые числа больше либо равные 13 можно представить в виде суммы двух составных слагаемых.

Ответ: 2, 3, 5, 7, 11.

Задача №5

На доске написано несколько положительных чисел, сумма которых равна 150. Среднее арифметическое трех самых больших равно 27, а среднее арифметическое двух самых маленьких равно 22. Сколько чисел написано на доске?

Решение

Если чисел 7 или больше, то их сумма не меньше, чем $22 \cdot 7 = 154$, что противоречит условию. Если чисел 5 или меньше, то их сумма не больше, чем $5 \cdot 27 = 135$, что тоже противоречит условию. Осталось показать, что при 6 числах все условия могут соблюдаться. Два самых маленьких числа в сумме дают $22 \cdot 2 = 44$, три самых больших в сумме дают $3 \cdot 27 = 81$, значит оставшееся число равно $150 - 44 - 81 = 25$. Тогда нам подходят, например, следующие числа: 21, 23, 25, 26, 27 и 28.

Ответ: 6.



Электронная школа Знаника
znanika.ru